Практическое занятие 16

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Цель занятия – научиться разлагать дробно-рациональные функции на простейшие дроби; познакомиться с методом неопределенных коэффициентов.

Основные сведения и образцы решения задач

Определение. ***Рациональной*** (***дробно-рациональной***) ***функцией*** называется дробь $R(x)$, числителем и знаменателем которой являются многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. всякая дробь вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$), то дробь называется ***неправильной***. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$), то дробь называется ***правильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби (посредством деления числителя на знаменатель «уголком»):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

где $R(x) -$ целая часть дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$; $S(x) -$ остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ (т. е. многочлен степени $k < m$).

Так как интегрирование многочлена не представляет затруднений, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Правильную рациональную дробь можно разложить на ***простейшие дроби*** следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$; 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$,

где $a, p, q, A, M, N \in R$ и $p^2-4q<0$, т. е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Правильную рациональную дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$, можно единственным образом разложить на сумму простейших рациональных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} +$$

$$+ \dots + \frac{B_1}{x-a_i} + \frac{B_2}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{B_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots +$$

$$+ \frac{S_1x+T_1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{S_2x+T_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{S_{l_j}x+T_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}, \qquad (1)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, \dots, B_1, B_2, \dots, B_{k_i}, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_{l_1}, N_{l_1}, \dots, S_1, T_1, S_2, T_2, \dots, S_{l_j}, T_{l_j} \in R$.

Например,

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2x^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} + \frac{F}{x} + \frac{M}{x^2} + \frac{N}{x^3}.$$

Чтобы найти коэффициенты разложения (1), чаще всего применяют метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений.

А) Метод неопределенных коэффициентов

Суть этого метода состоит в следующем. Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ по формуле (1). Приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q(x)$ и приравняем многочлен, получившийся в числителе, к многочлену $P(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Имеем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, ..., A_{k_1}, ..., B_1, B_2, ..., B_{k_i}, M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_{l_1}, N_{l_1}, ..., S_1, T_1, S_2, T_2, ..., S_{l_j}, T_{l_j}.

Пример 1.

Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}.$$

Решение.

Разложим знаменатель на множители:

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)=$$
$$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3).$$

Запишем разложение рациональной дроби на простейшие дроби:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Приведем правую часть разложения к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}.$$

Отбрасывая знаменатель, получаем (равные дроби с одинаковыми знаменателями имеют и равные числители):

$$7x^2+26x-9=$$
$$=A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x-1)(x+3)$$

или

$$7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+$$
$$+(9A+B-3C+2D)x+(9A-3B-3D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 0 = A + B + C, \\ x^2 & 7 = 5A + B + 2C + D, \\ x^1 & 26 = 9A + B - 3C + 2D, \\ x^0 & -9 = 9A - 3B - 3D \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Longrightarrow A = 1,\ \ B = 1,\ \ C = -2,\ \ D = 5.$$

Следовательно,

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} + \frac{5-2x}{x^2+2x+3}.$$

Б) Метод частных значений

При нахождении неопределенных коэффициентов вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно задать переменой x несколько частных значений и получить систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Этот метод удобен, когда корни знаменателя рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ просты и действительны (в этом случае последовательно полагаем x равным каждому из корней знаменателя).

Пример 2.

Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Решение.

По формуле (1) получим

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Приведя правую часть данного равенства к общему знаменателю и приравнивая числители равных дробей с равными знаменателями, имеем

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Придавая переменной x последовательно частные значения, равные корням знаменателя $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, находим:

$$\begin{array}{l|rcr} x = 0 & -8 & = & -4A, \\ x = -2 & -24 & = & 8B, \\ x = 2 & 40 & = & 8C, \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow\ A = 2,\ B = -3,\ C = 5.$$

Таким образом,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

Пример 3.

Найти интеграл $\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx=[\text{см. пример 2}]=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)=$$
$$=2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+C.$$

Задания для работы в аудитории

№ 1866–1872 (четные), 1882.

Домашние задания

№ 1867–1871 (нечетные), 1881.