ЛЕКЦИЯ 14

16. КИНЕТОСТАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Одним из важных этапов при проектировании механизмов и машин является силовой расчет, который проводится с целью определения действующих на звенья механизмов сил, знание которых необходимо для расчета деталей на прочность и износ, для определения мощности двигателя, выбора типа и размеров подшипников и т.д.

При решении задач силового расчета механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным; точно так же предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчета с помощью уравнений равновесия.

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчет называется *статическим.* Если в число заданных сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой расчет называется *кинетостатическим*.

В основе кинетостатического исследования лежат два принципа: *принцип Даламбера* и *принцип статической определимости*.

Применительно к механизмам принцип Даламбера можно сформулировать следующим образом: *если к механизму приложить все внешние силы, все реакции в связях, а также силы и моменты сил инерции, то механизм можно рассматривать, как находящийся в равновесии и к нему применимы уравнения статики*.

Принцип статической определимости заключается *в равенстве количества неизвестных реакций к количеству возможных уравнений равновесия*.

16.1. Условия статической определимости кинематических цепей

Рассмотрим условие статической определимости плоских кинематических цепей.

Сила считается заданной, если известны три параметра: точка приложения, величина и направление.

Число подлежащих определению реакций равно количеству условий связи накладываемых кинематической парой на кинематическую цепь.

Рассмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов. Во вращательной паре V-го класса известна точка приложения силы реакции $\overline{R}$ – центр шарнира, величина и направление этой реакции не известны (рис. 16.1, а). В поступательной кинематической паре V-го класса известно направление сила реакции $\overline{R}$ – перпендикулярно направляющей, но не известна точка приложения и величина (рис. 16.1, б).

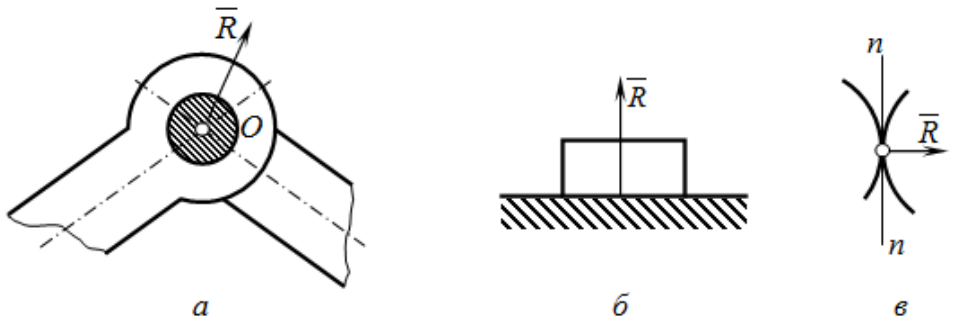

Рис. 16.1. Кинематические пары:
а – вращательная V класса, *б* – поступательная V класса; *в* – IV класса

Таким образом, в кинематических парах V класса необходимо найти по два неизвестных параметра ($2p_1$).

В кинематических парах IV класса известно направление и точка приложения реакции $\overline{R}$, а неизвестна ее величина (рис. 16.1, в).

Следовательно, в кинематических парах IV-го класса неизвестен только один параметр (p_2).

Из курса механики известно, что для каждого звена, совершающего плоскопараллельное движение, можно составить три уравнения равновесия, соответственно для n звеньев $3n$ уравнений равновесия. Значит, условием статической определимости будет

$$2p_1 - p_2 = 3n,$$

а это есть условие существование структурных групп Ассура. Следовательно, группы Ассура являются не только кинематически, но и статически определимыми.

16.2. Силы, действующие на звенья механизмов

Во время работы механизма на его звенья действуют внешние силы: *движущие силы, силы сопротивлений, силы тяжести звеньев, силы инерции*.

Кроме того, при движении механизма в кинематических парах возникают реакции связей и силы трения. Реакции связей и силы трения в кинематических парах по отношению ко всему механизму являются **внутренними** (взаимно уравновешенными) силами, а по отношению к отдельному звену – **внешними**. Реакции в кинематических парах возникают не только от действия внешних сил, но и от действия сил инерции. Составляющие реакций от действия сил инерции называют дополнительными динамическими давлениями.

Силы, которые ускоряют движение ведущего звена механизма, называют **движущими**, а те, которые замедляют его движение, – **силами сопротивлений**.

Силы сопротивлений делятся на *полезные* и *вредные*. Силы, на преодоление которых затрачивается работа, необходимая для выполнения

технологического процесса, называют **силами полезных сопротивлений**. **Силами вредных сопротивлений** называют силы на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх необходимой для выполнения технологического процесса.

Следует заметить, что приведенная классификация носит условный характер. Например, силы тяжести при подъеме центров масс звеньев будут силами сопротивлений, а при опускании – движущими силами. Так же обстоит дело и с силами трения. Трение в подшипниках представляют силы сопротивления, а в ременных передачах – движущие силы.

На звенья механизма действует *сила тяжести* G, прикладываемая к центру масс и направленная вертикально вниз:

$$G_i = m_i g, \tag{1}$$

где G_i – сила тяжести *i*-го звена, Н; m_i – масса *i*-го звена, кг; g – ускорение свободного падения, $g = 9{,}8$ м/с^2.

Из теоретической механики известно, что если звено совершает плоскопараллельное движение, то силы инерции сводятся к двум величинам:

- *силе инерции* $\overline{F}_u$, приложенной к центру масс звена;
- к *паре сил инерции с моментом* M_u относительно центра звена.

Сила инерции определяется по формуле

$$\overline{F}_{ui} = -m_i \overline{a}_{S_i}, \tag{2}$$

где $\overline{F}_{ui}$ – сила инерции *i*-го звена, Н; $\overline{a}_{S_i}$ – ускорение центра масс *i*-го звена, м/с^2.

Знак «минус» показывает, что вектор силы инерции направлен прямо противоположно вектору ускорения.

Момент пары сил инерции направлен противоположно угловому ускорению и определяется из соотношения

$$M_{u_i} = -J_{S_i} \overline{\varepsilon}_i, \tag{3}$$

где M_{ui} – момент пары сил инерции *i*-го звена, Н·м; J_{S_i} – момент инерции *i*-го звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения *i*-го звена, кг·м^2; $\overline{\varepsilon}_i$ – угловое ускорение *i*-го звена, рад/с^2.

Момент инерции *i*-го звена определяется по формуле

$$J_{S_i} = m_i \rho^2,$$

где ρ – радиус инерции.

Таким образом, для определения силы инерции и момента пары сил инерции звена необходимо знать его массу, момент инерции, величину и направление ускорения центра масс и углового ускорения звена.

16.3. Силовой расчет структурных групп Ассура

Силовой расчет рассмотрим на примере механизма изображенного на

рис. 16.2. Исследование проводится для конкретного положения механизма, при необходимости аналогичные исследования проводятся для нескольких положений. Обычно силами трения в кинематических парах пренебрегают. Расчет начинают с группы наиболее удаленной от ведущего звена.

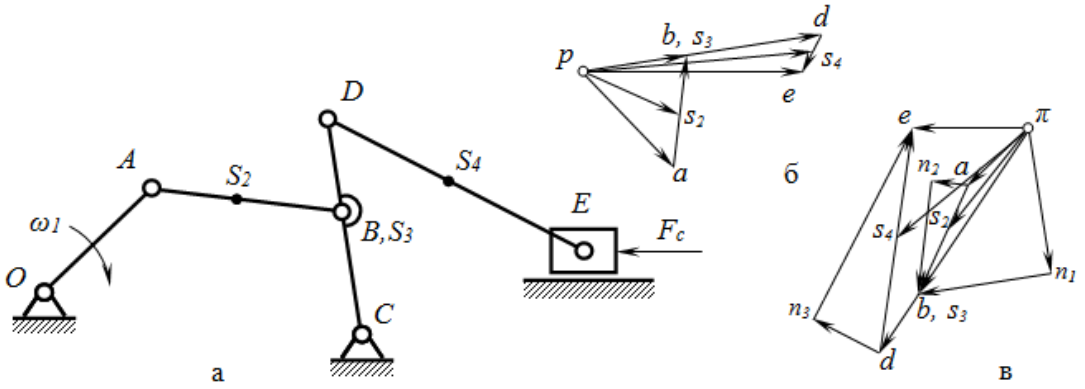

Рис. 16.2. Исследуемый механизм:
а – схема; б – план скоростей; в – план ускорений

Для исследуемого механизма заданы: размеры звеньев l_{OA}, l_{AB}, l_{CD}, l_{BC}, l_{OA}, l_{DE}; массы звеньев m_2, m_3, m_4, m_5; сила полезных сопротивлений $\overline{F}_c$; моменты инерции звеньев J_{S_2}, J_{S_3}, J_{S_4}.

Необходимо найти реакции в кинематических парах $\overline{R}_{01}$, $\overline{R}_{12}$, $\overline{R}_{23}$, $\overline{R}_{34}$, $\overline{R}_{45}$, $\overline{R}_{03}$, $\overline{R}_{05}$ и уравновешивающую силу $\overline{F}_y$.

Исследование проводим в следующей последовательности:

1. Для заданного положения механизма строим планы скоростей и ускорений (рис. 16.2).

2. Для того чтобы воспользоваться принципом Даламбера вычислим силы, действующие на механизм, по формулам (1–3).

3. Производим расчет структурных групп. Выделяем из состава механизма группу Асура наиболее удаленную от ведущего звена (группа 4-5), заменяя действие отсоединенных звеньев реакциями $\overline{R}_{34}$ и $\overline{R}_{05}$. Реакцию $\overline{R}_{34}$ представляем в виде двух составляющих: нормальной $\overline{R}^n_{34}$, направленной вдоль звена *DE* и тангенциальной $\overline{R}^t_{34}$, направленной перпендикулярно к оси звена *DE*. Реакция $\overline{R}_{05}$ в поступательной паре *E*, перпендикулярна к направляющей ползуна и неизвестна по направлению.

Изображаем группу 4-5 в масштабе, прикладываем к ней в соответствующие точки действующие силы (рис. 16.3, а). Данная группа является группой II класса 2-го вида. Для определения реакций в кинематических парах рассмотрим равновесие данной группы, для чего составим следующие уравнения:

а) уравнение моментов всех сил относительно точки E для 4-го звена:

$$\sum M_E^{(4)} = G_4 h_{G_4} - F_{u_4} h_{u_4} - \frac{M_{u_4}}{\mu_l} + R_{34}^t ED = 0,$$

откуда

$$R_{34}^t = \frac{\frac{M_{u_4}}{\mu_l} + F_{u_4} h_{u_4} - G_4 h_{G_4}}{ED}.$$

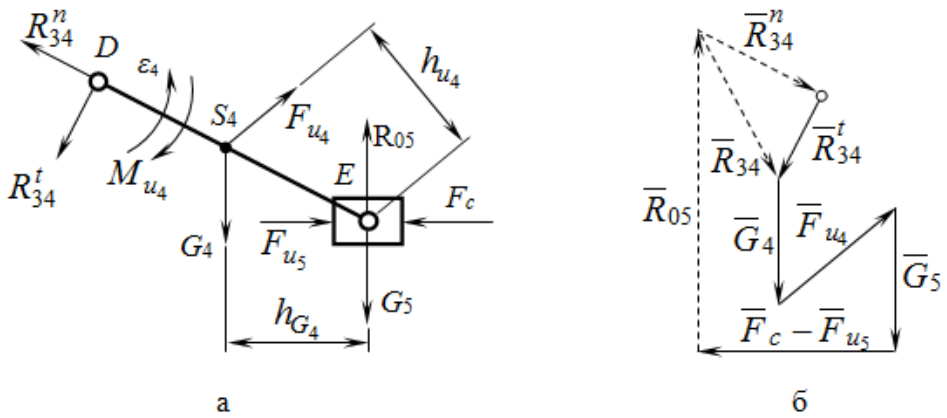

Рис. 16.3. Группа звеньев 4-5 с действующими силами (а) и план сил группы (б)

б) уравнение векторной суммы всех сил, действующих на звенья 4 и 5. Составление уравнения производим в следующем порядке, сначала учитываем силы, действующие на 4-е звено, а потом силы, действующие силы на 5-е звено. Неизвестные силы записываем в начале и конце уравнения:

$$\sum \overline{F}_{4,5} = \overline{R}_{34}^n + \overline{R}_{34}^t + \overline{G}_4 + \overline{F}_{u_4} + \overline{G}_5 + \overline{F}_{u_5} + \overline{F}_c + \overline{R}_{05} = 0.$$

Полученное уравнение решаем графически (рис. 16.3, б), для чего строим план сил в масштабе $\mu_F = \frac{F_\partial}{|F_{чер}|}$, $\left[\frac{Н}{мм}\right]$, где F_∂ – действительная величина силы, Н; $|F_{чер}|$ – отрезок на чертеже, отображающий величину F_∂, мм.

Построив векторы известных сил, замкнем многоугольник неизвестными силами $\overline{R}_{05}$ и $\overline{R}_{34}$, линиями параллельными их известным направлениям. Точка пересечения укажет конец вектора $\overline{R}_{05}$ и начало вектора $\overline{R}_{34}$. Измерив и умножив длины векторов на масштаб μ_F, получим действительные значения искомых реакций.

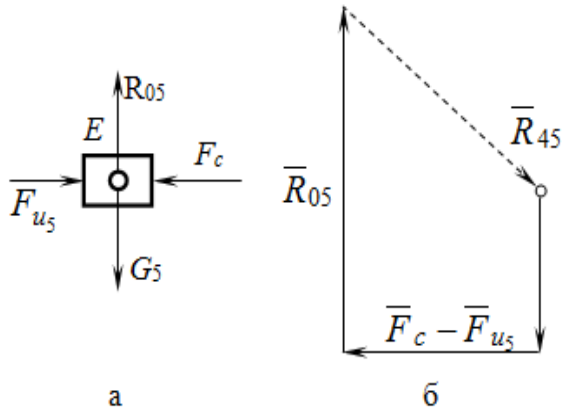

Рис. 16.4. Силы, действующие на звено 5 (*а*) и план сил (*б*)

Для нахождения реакции $\overline{R}_{45}$ рассмотрим равновесие звена 5, приложив к нему действующие силы (рис. 16.4, а). Составим уравнение равновесия сил:

$$\sum \overline{F}_5 = \overline{R}_{45} + \overline{G}_5 + \overline{F}_{u_5} + \overline{F}_c + \overline{R}_{05} = 0.$$

и решим его графически (рис. 16.4, б).

Перейдем к расчету группы 2-3, изобразим ее также отдельно в масштабе, связи заменим реакциями, прикладываем действующие нагрузки (рис. 16.5, а). Данная группа является группой II класса 1-го вида.

Рассматривая равновесие группы 2-3, составим следующие уравнения:

а) уравнение суммы моментов всех сил относительно точки *B* для 2-го звена, найдем реакцию $\overline{R}_{12}^t$:

$$\sum M_B^{(2)} = 0 \;\rightarrow\; \overline{R}_{12}^t;$$

б). Составим уравнение моментов суммы сил относительно точки *B* для 3-го звена, найдем реакцию $\overline{R}_{03}^t$:

$$\sum M_B^{(3)} = 0 \;\rightarrow\; \overline{R}_{03}^t.$$

в) составим уравнение векторной суммы всех сил, действующих на звенья 2 и 3

$$\sum \overline{F}_{2,3} = \overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^t + \overline{G}_2 + \overline{F}_{u_2} + \overline{G}_3 + \overline{F}_{u_3} + \overline{R}_{03}^t + \overline{R}_{03}^n = 0$$

и решаем его графически, откуда найдем $\overline{R}_{12}^n$ и $\overline{R}_{03}^n$ (рис. 16.5, б).

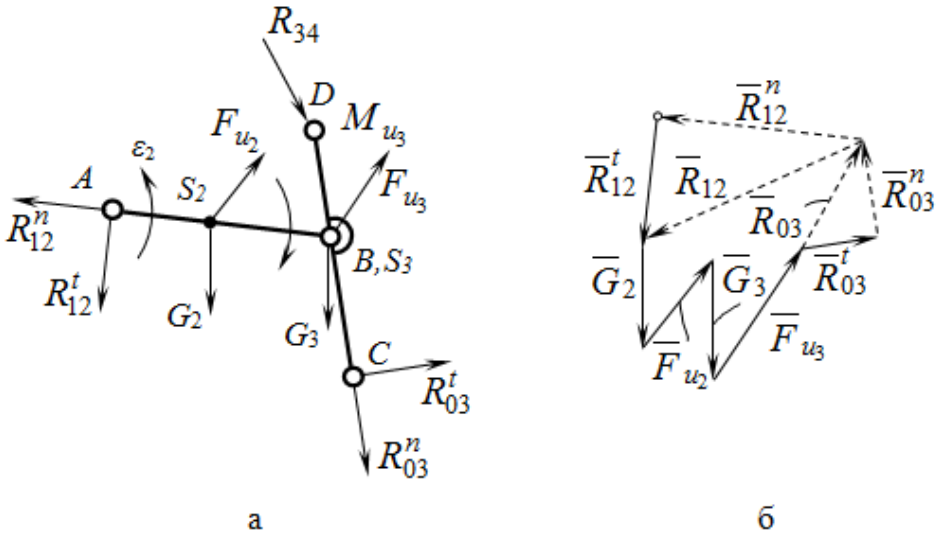

Рис. 16.5. Группа 2-3 с действующими силами (а) и план сил группы (б)

Для определения реакции в кинематической паре *B* рассмотрим равновесие одного из звеньев, например 2-го (рис. 16.6, а). Составляем уравнение равновесия и решаем его графически (рис. 16.6, б):

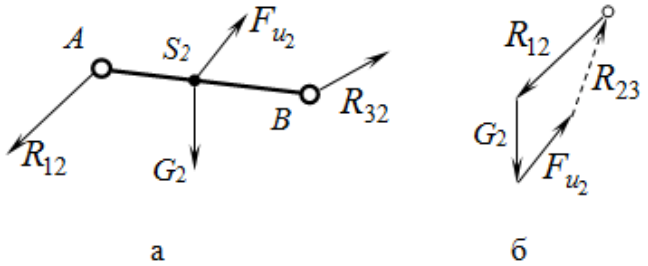

Рис. 16.6. Силы, действующие на звено 2 (*а*)
и план сил (*б*)

$$\sum \overline{F}_2 = \overline{R}_{12} + \overline{G}_5 + \overline{F}_{u_2} + \overline{R}_{32} = 0.$$

Произведем расчет ведущего звена, которое по классификации Ассура относится к механизмам I класса. Изобразим ведущее звено в масштабе (рис. 16.7, а). Ведущее звено является группой Ассура, следовательно, его надо уравновесить силой $\overline{F}_y$. Найдем величину уравновешивающей силы $\overline{F}_y$ из уравнения моментов:

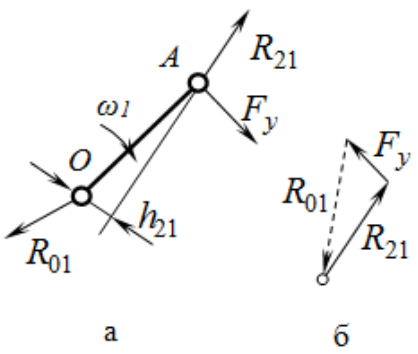

Рис. 16.7. Силы, действующие на звено 1 (*а*) и план сил (*б*)

$$\sum M_O^{(1)} = R_{21}h_{21} - F_y OA = 0,$$

откуда

$$F_y = \frac{R_{21}h_{21}}{OA}.$$

Для определения реакции $\overline{R}_{01}$ составим уравнение равновесия кривошипа и решим его графически (рис. 16.7, б).

$$\sum \overline{F}_1 = \overline{R}_{01} + \overline{F}_y + \overline{R}_{21} = 0.$$

Таким образом, мы рассмотрели порядок расчета групп 1 и 2-го видов, далее рассмотрим порядок силового расчета группы II класса 3-го вида (кулисный механизм) представленной на рис. 16.8, а.

Данную группу удобнее рассмотреть отдельно по звеньям. Рассмотрим равновесие 3-го звена (рис. 16.8, б):

а) составим уравнение моментов всех сил относительно точки В, найдем $\overline{R}_{03}^t$:

$$\sum M_B^{(3)} = R_{03}^t O_1B - F_{u_3}h_{u_3} + G_3h_{G_3} + R_{34}h_{34} - \frac{M_{u_3}}{\mu_l} = 0,$$

откуда

$$R_{03}^t = \frac{F_{u_3}h_{u_3} - G_3h_{G_3} + R_{34}h_{34} - \dfrac{M_{u_3}}{\mu_l}}{O_1B} = 0;$$

б) составим и решим графически уравнение векторной суммы всех сил, действующих на 3-е звено (16.8, г):

$$\sum \overline{F}_3 = \overline{R}_{03}^n + \overline{R}_{03}^t + \overline{G}_3 + \overline{F}_{u_3} + \overline{R}_{34} + \overline{R}_{23} = 0.$$

При построении плана сил замкнем его известными по направлению векторами $\overline{R}_{03}^n$ и $\overline{R}_{23}$. Заметим, что реакция R_{23} перпендикулярна кулисе. Точка пересечения векторов $\overline{R}_{03}^n$ и $\overline{R}_{23}$ указывает начало вектора $\overline{R}_{03}$ и конец вектора $\overline{R}_{23}$.

Для нахождения реакции $\overline{R}_{12}$ во вращательной кинематической паре *B*, рассмотрим равновесие звена 2 (рис. 16.8, в), после чего составим уравнение равновесия:

$$\sum \overline{F}_2 = \overline{G}_2 + \overline{R}_{32} + \overline{F}_{u_2} + \overline{R}_{12} = 0.$$

Решаем последнее уравнение графически (рис. 16.8, д).

Одной из основных задач теории машин является определение законов движения машин и их исполнительных механизмов. Для решения данной задачи используется уравнение кинетической энергии и если в состав используемого механизма входят звенья совершающие сложное движение, то

расчет требует громоздких вычислений. Поэтому в машинах (или механизмах) имеющих одну степень свободы все движущие силы заменяют одной приведенной силой.

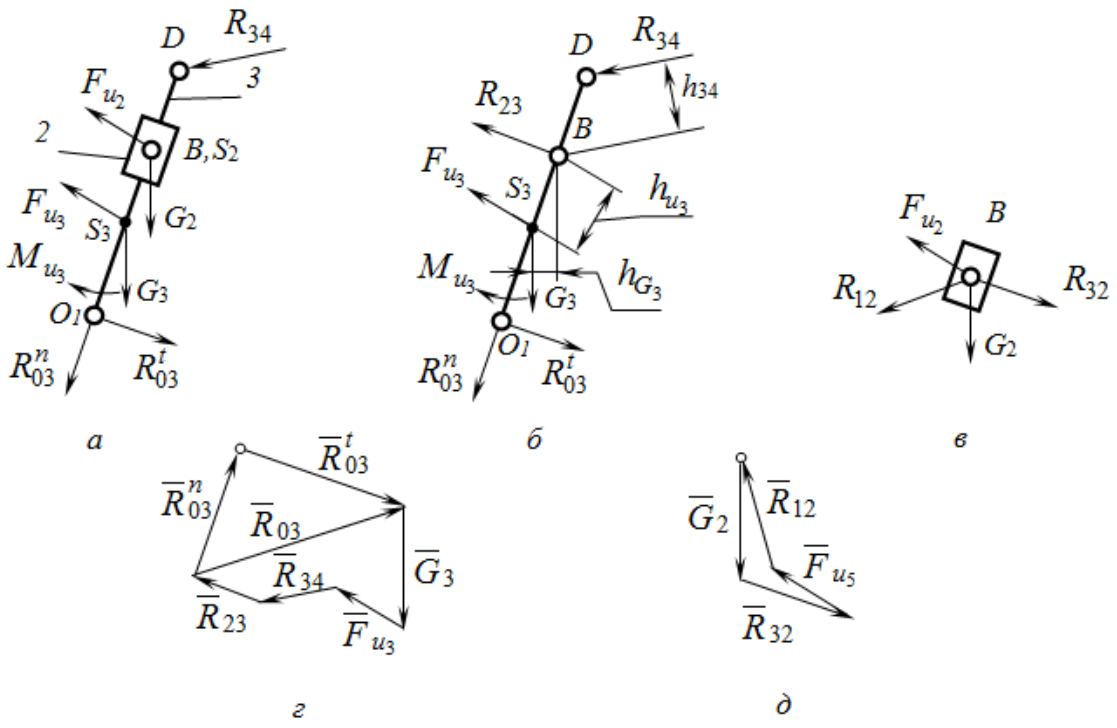

Рис. 16.8. Кулисный механизм: *а* – силовое нагружение механизма; *б* – силовое нагружение 3-го звена; *в* – силовое нагружение 2-го звена; *г* – план сил действующих на 3-е звено; *д* – план сил действующих на 2-е звено

16.4. Теорема Н.Е. Жуковского

Приведенной называют силу, условно приложенную к одной из точек механизма (к точке приведения, обычно к точке *A* ведущего звена), элементарная работа которой на возможном перемещении точки приведения равна сумме элементарных работ приводимых сил на перемещениях точек приложения этих сил, т.е.

$$F_n dS_n \cos\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} F_i dS_i \cos\alpha_i \,, \qquad (4)$$

где F_n – приведенная сила, Н; dS_n – элементарное перемещение точки приложения приведенной силы F_n, м; α_n – угол между векторами приведенной силы и скорости точки приведения, °; i – порядковый номер звена, $i = 1,2,3,...,n$; F_i – сила, приложенная к i-му звену, Н; dS_i – элементарное перемещение точки приложения силы F_i, м; α_i – угол между векторами F_i и скорости точки приложения силы $\overline{\upsilon}_i$, °.

Разделив равенство (4) на dt, получим:

$$F_n \bar{\upsilon}_n \cos\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \bar{\upsilon}_i \cos\alpha_i \qquad (5)$$

или

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = 0, \qquad (6)$$

где $\bar{\upsilon}_n$ и $\bar{\upsilon}_i$ – скорости точек приложения сил F_n и F_i; P_n и P_i – мощности соответственно приведенной и приводимых сил.

Из равенства (6) можно заключить, что мощность приведенной силы равна сумме мощностей приводимых сил.

Направление приведенной силы может быть выбрано произвольно (рис. 16.9, а, в). В данном случае приведенная в точке *A* сила направлена против скорости этой точки, следовательно $\cos\alpha_n = 1$, тогда из равенства (5) найдем

$$P_n = P_i \frac{\upsilon_i}{\upsilon_A} \cos\alpha_i . \qquad (7)$$

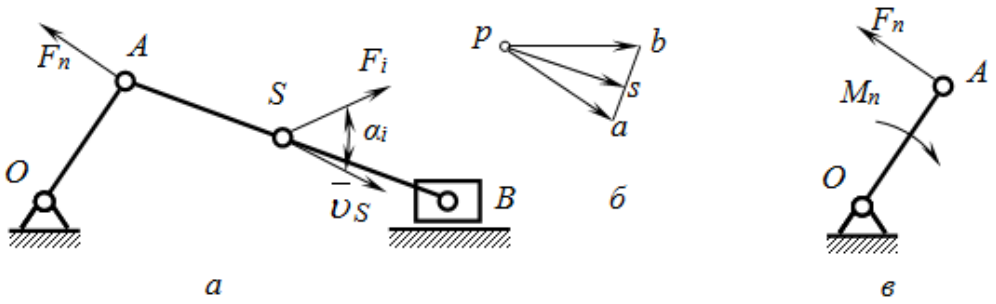

Рис. 16.9. Определение приведенной силы:
а – схема механизма; *б* – план скоростей; *в* – звено приведения

Из выражения (7) видно, что приведенная сила зависит от положения механизма и за цикл работы будет изменяться от нуля до максимума.

Уравновешивающей является сила, равная и направленная противоположно приведенной силе ($F_y = -F_n$).

Заменяя в уравнении (5) приведенную силу уравновешивающей, получим

$$F_y \bar{\upsilon}_y \cos\alpha_y + \sum_{i=1}^{n} F_i \bar{\upsilon}_i \cos\alpha_i = 0 \qquad (7)$$

или

$$P_y + \sum_{i=1}^{n} P_i = 0.$$

Из последних уравнений следует, что сумма мощностей на возможных перемещениях точек механизма равна нулю.

Пусть в точке S звена AB приложена сила F_i (рис. 16.10, а), а точки A и B имеют скорости $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$. Построив план скоростей (рис. 16. 10, б) в масштабе μ_υ, определим скорость точки S. Перенесем вектор $\overline{\upsilon}_S$ в точку S звена и построим между векторами F_i и $\overline{\upsilon}_S$ угол α_i.

Повернем план скоростей звена на 90° (в любом направлении) и перенесем в точку s повернутого плана силу F_i (рис. 16.10, в). Из полюса плана опустим перпендикуляр h_i, который будет плечом действия силы F_i относительно полюса.

Из плана скоростей (рис. 16.10, в) следует

$$P_i = F_i \overline{\upsilon}_i \cos\alpha_i = F_i \overline{ps}\mu_\upsilon \cos\alpha_i = F_i h_i \mu_\upsilon .$$

Таким образом, делаем вывод, что мощность силы, действующей на звено, можно представить в виде момента этой силы относительно полюса повернутого на 90° плана скоростей и умноженного на масштаб плана μ_υ.

Выполнив такую замену в уравнении (7), получим

$$F_y h_y + \sum_{i=1}^{n} F_i h_i = 0 .$$

Найденное уравнение выражает теорему Жуковского, являющуюся геометрической интерпретацией принципа возможных перемещений: **если в соответствующие точки повернутого на 90° плана скоростей перенести все силы, под действием которых механизм находится в равновесии, то сумма моментов всех таких сил относительно полюса плана равна нулю.**

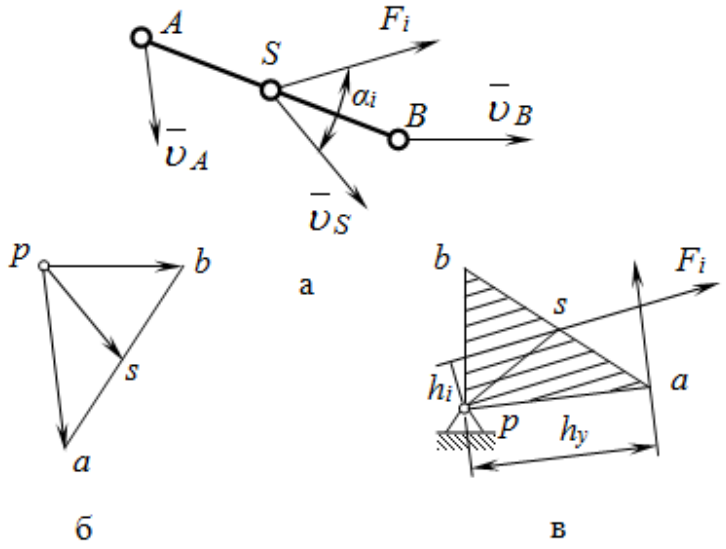

Рис. 16.10. «Рычаг» Жуковского:
а – силовое нагружение звена; б – план скоростей; в – схема нагружения «рычаг»

На основе принципа независимости действия сил, используя теорему Жуковского, можно определить уравновешивающую силу для каждой из сил, приложенных к механизму.

Повернутый план скоростей Н. Е. Жуковский рассматривает как жесткий уравновешенный рычаг с опорой в полюсе («рычаг» Жуковского).

Метод определения уравновешивающей силы с помощью рычага Жуковского является проверочным. Погрешность в расчетах величины уравновешивающей силы, полученной силовым расчетом F_c^y механизма и с помощью рычага Жуковского $F_c^{ж}$ вычисляем по формуле

$$\Delta = \frac{F_y^c - F_y^{ж}}{F_y^c} \cdot 100\%.$$

Относительная погрешность в вычислениях не должна превышать ± 5%.